Grafiğe göre $\forall x \in [-2,2]$ için $-6 \leq f(x) \leq 2$ olur. Böylece $x=-2$ mutlak minimum, $x=2$ mutlak maksimum nokta olur. Bunların dışında

$x=\frac{1}{2}$ noktası için $\forall x \in (0,1)$ olduğunda $f(x) \leq f(\frac{1}{2})$ olup $x=\frac{1}{2}$ noktası yerel maksimum noktasıdır.

$x=1$ noktası için $\forall x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ olduğunda $f(x) \geq f(1)$ olup $x=1$ yerel minimum noktasıdır.

Şimdi türev yardımıyla ekstremum noktaların nasıl belirlenebileceğini inceleyelim.

TEOREM (FERMAT TEOREMİ): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c\in(a,b)$ noktasında yerel minimum veya yerel maksimuma sahip olsun. Eğer f fonksiyonu bu c noktasında türevlenebilir ise $f'(c)=0$ dır.

Dikkat edilirse fermat teoremi bize ekstremum noktaları buldurmuyor. Ancak bu noktaların nerede aranacağına dair ipucu veriyor. Yine bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Yani $f'(c)=0$ olan c noktalarının ekstremum nokta olmaları gerekmez.

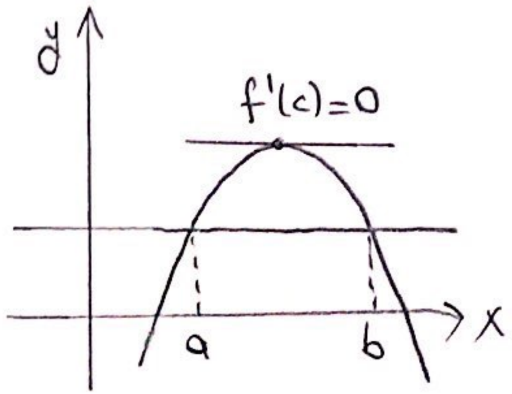
Örnek! $f(x)=x^3$ fonksiyonunu alalım. $f'(x)=3x^2$ olup $c=0$ için $f'(c)=0$ olur. Ancak 0'ı içeren hangi açık aralık alınırsa alınsın bu aralıkta hem pozitif hem de negatif sayılar vardır. O halde $f(x)>0$ ve $f(x)<0$ olan x noktaları olduğundan $c=0$ türevi sıfır yapmasına rağmen ekstremum nokta değildir.

Böylece Fermat teoremi de dikkate alınırsa bir f fonksiyonunun ekstremumları, türevi sıfır yapan iç noktalarda, f nin türevinin olmadığı noktalarda ve tanım kümesinin uç noktalarında araştırılmalıdır. Bu noktalar kritik noktalar olarak ifade edilirler.

TEOREM (ROLLE TEOREMİ): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a)=f(b)$ ise $f'(c)=0$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ vardır.

Burada özel olarak $f(a)=f(b)=0$ alınırsa Rolle teoremini şöyle ifade edilebilir; f fonksiyonunun herhangi iki kökünün arasında türevinin de bir kökü vardır.

Geometrik Yorumu: Eğer türevlenebilen bir fonksiyon yatay bir doğruyu farklı iki noktada kesebiliyor ise bu noktalar arasında eğrinin teğetinin x-eksenine paralel olduğu ve türevin sıfır olduğu en az bir nokta vardır.



Örnek: $f(x) = x^3+3x+1$ fonksiyonunun Reel sayılarda bir tek kökünün olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Kabul edelim ki f fonksiyonunun a ve b gibi iki farklı reel kökü olsun. Bu durumda

$$f(a)=0 \quad \text{ve} \quad f(b)=0 \text{ dır.}$$

f fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ve $f(a)=f(b)$ olduğundan Rolle teoremi gereğince $f'(c)=0$ olacak şekilde $\exists\, c \in (a,b)$ vardır. Ancak

$$f'(x)=3x^2+3 \qquad f'(c)=3c^2+3=0$$ olacak şekilde

c yoktur. Bu ise çelişkidir. Kabulumüz yanlıştır.

f fonksiyonunun bir tek reel kökü vardır.

Örnek: $r(\theta) = \theta + \sin^2\frac{\theta}{3} - 8$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $(-\infty,\infty)$ aralığında bir tek kökünün olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Eğer $r(\theta)=0$ denkleminin birden çok kökü olsaydı Rolle teoremi gereğince iki kökünün arasında türevinin de bir kökü olmalıydı.

$$r'(\theta) = 1 + \frac{2}{3}\sin\frac{\theta}{3}.\cos\frac{\theta}{3} = 1 + \frac{1}{3}\sin\frac{2\theta}{3}$$

$$r'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin\frac{2\theta}{3} = -3$$

Bu ise mümkün olamayacağından $r(\theta)=0$ denkleminin bir tek kökü vardır.

Örnek: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ fonksiyonunun türevinin köklerini hangi aralıkta bulunur.

Çözüm: f türevlenebilir fonksiyon olup Rolle teoremini kullanabiliriz.

$f(1) = f(2)$ olduğundan $1 < c_1 < 2$ için $f'(c_1) = 0$

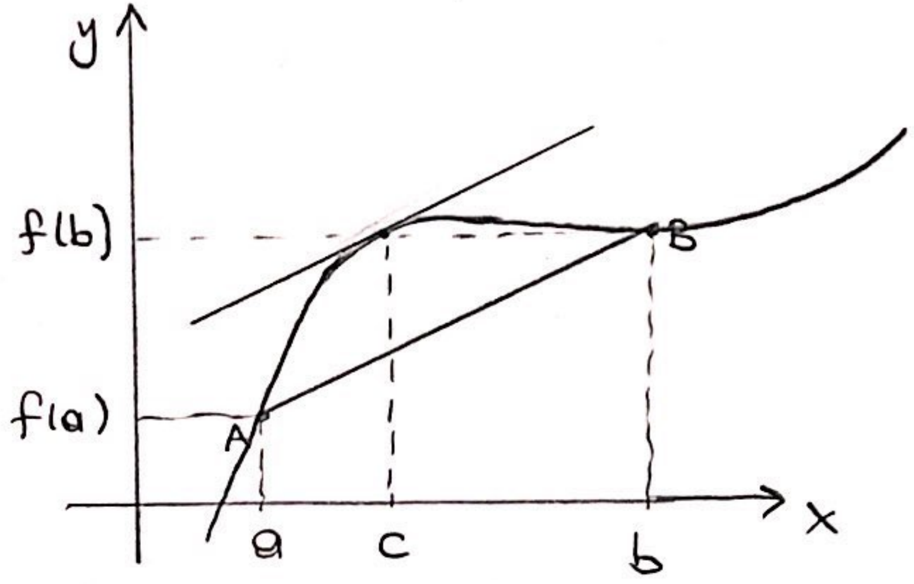
$f(2) = f(3)$ 〃 $2 < c_2 < 3$ için $f'(c_2) = 0$

f', 2. dereceden olduğundan en çok 2 kökü vardır. Bu kökler $[1,3]$ aralığındadır.

TEOREM (ORTALAMA DEĞER TEOREMİ): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda $\exists c \in (a,b)$ için

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$ olur.

Geometrik Yorumu: a ve b arasındaki bir c noktasından çizilen teğet (a, f(a)) noktasını (b, f(b)) noktasına birleştiren kirişe paraleldir.



Örnek: $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+5$ fonksiyonu için ortalama değer teo. sağlayan c sayısını bulunuz.

f fonksiyonu $[0,2]$ de sürekli, $(0,2)$ de türevlenebilir $f'(x)=3x^2-3$ olup

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0} \Rightarrow 3c^2-3=1 \qquad c=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$-\frac{2}{\sqrt{3}}\notin(0,2)$ olduğundan $c=\frac{2}{\sqrt{3}}$ dür.

Örnek: $f: [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , 0 \le x \le 2 \\ 6x-x^2-7 & , 2 < x \le 3 \end{cases}$

fonksiyonu ortalama değer teoremini sağlar mı?

Çözüm:

f; $[0,3]$ de sürekli, $(0,3)$ de türevli olmalıdır.

$x=2$ noktası için süreklilik ve türevlenebilmeyi inceleyelim.

$$\lim_{x\to 2^-} 2x-3 = 1 = \lim_{x\to 2^+} 6x-x^2-7 = f(2)$$

olduğundan f, $[0,3]$ de süreklidir.

$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{6x-x^2-7-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{6-2x}{1} = 2$$

$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} 2 = 2$$

$f'(2^+) = f'(2^-) = 2$ olup f fonksiyonu $(0,3)$ de türevlenebilirdir. Ortalama değer teo. şartlarını sağlar.

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{5}{3}$$

$$f'(c) = 2 \neq \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow c \in (0,2)$ yoktur.

$f'(c) = 6-2c = \frac{5}{3} \Rightarrow c = \frac{13}{16}$ olup $c \in (2,3)$ dir.

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ de sürekli , (a,b) de türevlenebilir ise ortalama değer teoreminden

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$ yazılabilir.

$x_1<x_2$ olmak üzere $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ alalım. O halde f fonksiyonu $[x_1,x_2]$ aralığında ortalama değer teo. şartlarını sağladığından $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)$ olur. Böylece (x_1,x_2) aralığında $f'(c)>0$ ise $f(x_1)<f(x_2)$ olup fonksiyon artan, $f'(c)<0$ ise $f(x_1)>f(x_2)$ olup fonksiyon azalan olur.

Böylece fonksiyonun türevinin pozitif olduğu yerlerde f artan fonksiyon, f nin türevinin negatif olduğu yerlerde f azalan fonksiyon olur. Bu sonuç sonlu olmayan aralıklar için de geçerlidir.

Örnek: $f(x) = x^3 - 12x - 5$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu yerleri bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \qquad x = \mp 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Artan olduğu küme $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

Azalan olduğu küme $(-2, 2)$ olur.